Τέταρτο Τεστ Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1
Να υπολογίσετε το $\mathbb{R}-$ διαφορικό των συναρτήσεων:

(i) $f(z)=\overline{z}^2,\ z\in\mathbb{C}$ στα σημεία $z_0=-i$ και $z_1=0$

(ii) $g(z)=\mathrm{Re}^2(z)+i\,\mathrm{Im}^2(z),\ z\in\mathbb{C}$ στα σημεία $z_0=-1-i$ και $z_1=1$

Θέμα 2
Δίνεται $n\in\mathbb{N}$ και η συνάρτηση $f\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/z^n} & ,\quad z\neq 0 \\ 0 & ,\quad z=0 \end{cases},$$

Για ποια $z\in\mathbb{C}$ η συνάρτηση είναι

(i) συνεχής;

(ii) $\mathbb{C}-$διαφορίσιμη;

(iii) $\mathbb{R}-$διαφορίσμιη;

Να υπολογίσετε το $\mathbb{R}-$διαφορικό της f σε τυχαίο σημείο της.

Θέμα 3
Αν $\phi\colon D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ είναι μία αρμονική συνάρτηση στο ανοιχτό D δηλαδή, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της ϕ έως και δευτέρας τάξης και είναι συνεχείς και επίσης, η ϕ ικανοποιεί την εξίσωση $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f=-\phi_x+i\phi_y$ είναι ολόμορφη στο D.

Θέμα 4

(i) Αν $f\coloneqq u+iv\colon D\to\mathbb{C}$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο (μη κενό, ανοιχτό και συνεκττικό) $D\subset\mathbb{C}$ και $au+bv=c$, όπου a,b,c μιγαδικές σταθερές και όχι όλες μηδέν, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στον τόπο D.

(ii) Έστω $f\colon D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση και έστω ένα σημείο $z_0\in D$. Να αποδείξετε ότι είτε η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο σημείο z_0, είτε $f'(z_0)=0$.

(iv) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(z)=\frac{2|z|^2+iz}{1+|z|^2},\ z\in\mathbb{C}$$

είναι μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στα σημεία 0 και $-2i$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!